MATHÉMATIQUE
(enseignement secondaire – 2e degré)

TRIGONOMÉTRIE
(notions de base)



Module **322**



Enseignement à distance

Éditeur responsable : Denis Van Lerberghe, Directeur – Boulevard du Jardin botanique, 20-22 – 1000 Bruxelles

Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique

Direction de l' **Enseignement à Distance**

Ministère de la Communauté française

Boulevard du Jardin botanique 20-22

1000 Bruxelles

Téléphone : 02/ 690 82 82

Fax : 02/ 690 82 99

E-mail : ead@cfwb.be

Dépôt légal : D/2007/10930/5

INTRODUCTION

Le but de ce module **n'est pas** de vous proposer **un cours** de trigonométrie, **mais** seulement les **notions de base** qui vous seront **indispensables** pour comprendre certaines leçons de Géométrie (cours 269).

Vous ne recevrez que cette **seule série**, dans laquelle vous trouverez toutes les explications nécessaires, des TAC et un devoir. Ce dernier permettra à votre professeur de vérifier votre bonne compréhension des notions.
Comme dans tous nos modules sur support papier, le corrigé des TAC se trouve à la fin de la "leçon".

En voici le contenu :

- Notes sur l'utilisation d'une calculatrice scientifique.
- Quelques rappels.
- La définition des nombres trigonométriques des angles intérieurs d'un triangle.
- L'angle de pente.
- Les angles inscrits dans un cercle, les angles au centres.
- Les angles orientés.
- Le cercle trigonométrique.
- La représentation des angles orientés dans le cercle trigonométrique.
- La représentation des nombres trigonométriques dans le cercle trigonométrique.
- Les valeurs remarquables (valeurs des nombres trigonométriques de quelques angles particuliers).

Vous trouverez une table des matières détaillée au début de la "leçon".

Prenez votre temps : ce module est assez long, il vaut donc mieux ne pas vouloir le voir entièrement "en une fois".

A la fin de ce module, vous trouverez :

- une **notice individuelle** à **compléter** et à **renvoyer** avec votre devoir : elle est **nécessaire** à votre professeur correcteur ;
- une **évaluation** que nous vous demandons de compléter (n'oubliez pas le numéro de votre professeur correcteur) et de renvoyer aussi avec votre devoir : elle nous est indispensable !

Connaissances préalables requises

Il est souhaitable de maîtriser les savoirs, les savoir-faire et les compétences du premier degré de l'enseignement secondaire (et, en particulier, l'ordre de priorité des opérations !).

Matériel nécessaire

Outre les instruments habituels (latte, équerre, rapporteur, compas), vous aurez besoin d'une calculatrice scientifique (c'est-à-dire possédant les touches SIN, COS, TAN).
Vous trouverez à la page suivante un mode d'emploi succinct de ce type de calculatrice.
Gardez soigneusement ce mode d'emploi pour pouvoir le consulter facilement par la suite.

Bon travail !

Feuilles à détacher et à conserver

Mode d'emploi succinct de la calculatrice scientifique

Généralités

La calculatrice scientifique dispose des fonctions sin, cos, tan (et aussi ln ou log, e^x ou 10^x) et de leurs réciproques.

Le manuel d'utilisation, si vous en disposez, vous donnera toutes les indications nécessaires pour introduire vos calculs.
Si vous n'en disposez plus, les quelques notes suivantes devraient vous permettre d'utiliser correctement votre calculatrice.

1° Déterminez si votre calculatrice **respecte les priorités des opérations**.
Tapez :
[2] [+] [3] [*] [4] [=] ([ENTER] au lieu de [=] si votre calculatrice est programmable) :

- si la réponse est **14**, votre calculatrice respecte les priorités des opérations; vous pouvez donc "écrire" vos calculs comme d'habitude ;
- si la réponse est **20**, votre calculatrice exécute les opérations au fur et à mesure; vous devrez introduire des parenthèses pour indiquer les priorités.
  Pour le calcul cité en exemple, vous devrez donc taper : [2] [+] [(] [3] [*] [4] [)] [=].

2° Déterminez le **mode** : **degré, radian ou grade**.
Selon les machines, vous avez :

- soit une touche [DRG] : chaque fois que vous appuyez sur cette touche, vous passez au mode suivant D (degré), R (radian), G (grade). Une lettre (D, R ou G) dans l'écran d'affichage confirme le mode choisi ;
- soit une touche [mode] : en appuyant sur cette touche, vous avez un choix à faire, généralement à l'aide des flèches directionnelles du clavier ;
- soit les 3 possibilités : vous cochez le mode dans lequel vous allez travailler.

3° Déterminez **comment calculer une fonction**.

Votre machine étant en mode "degré", tapez [90] [sin] :

- la machine affiche **1** : dans ce cas, pour calculer la valeur d'une fonction, vous devez introduire d'abord le nombre puis, ensuite, appuyer sur la touche fonction (comme vous venez de le faire) ;

- la machine affiche **autre chose que 1** : effacez, puis tapez [sin] [90] :
  - la machine affiche **1** : dans ce cas, pour calculer la valeur d'une fonction, vous devez appuyer d'abord sur la touche de fonction puis, ensuite, vous entrez le nombre ;
  - la machine affiche **une erreur** : dans ce cas, vous avez probablement une calculatrice programmable. Quand vous appuyez sur [sin], l'affichage est **sin (** ou **sin ( )** → le nombre doit être contenu dans une paire de parenthèses.

4° Déterminez **comment accéder aux fonctions principales** (sur la touche elle-même) et **secondaires** des touches (inscription souvent au-dessus de la touche).

Pour accéder à la fonction secondaire, vous devez, avant, appuyer sur une autre touche qui varie selon les machines : [INV] ou [↑] ou [2nd] ou une touche de couleur (généralement, avec un F).

TABLE DES MATIÈRES

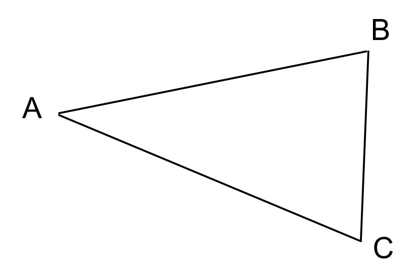
1. QUELQUES RAPPELS

1.1 Les triangles

Il existe différents types de triangles.

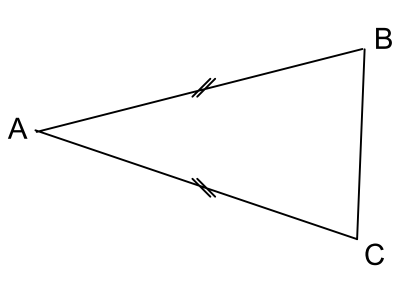
Le **triangle scalène** :
ses 3 côtés sont de longueurs différentes.

$$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$$

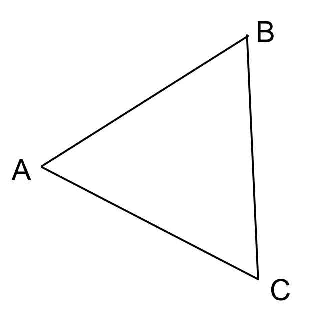


Le **triangle isocèle** :
deux de ses côtés ont la même longueur.

$$\overline{AB} = \overline{AC} \text{ (ou } \overline{AB} = \overline{BC} \text{ ou } \overline{BC} = \overline{AC}\text{)}$$

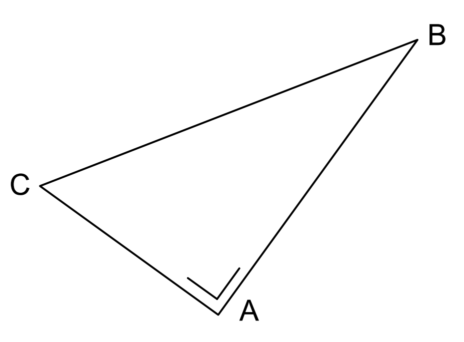


Le **triangle équilatéral** :
- ses 3 côtés ont la même longueur :
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$
- ses 3 angles ont la même amplitude :
$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$$



Le **triangle rectangle** :
un de ses angles est un angle droit.

$\widehat{A} = 1\text{dr}$
amplitude $\widehat{A} = 90°$



Remarque : un triangle rectangle peut être isocèle.

TAC 1
Un triangle rectangle peut-il être équilatéral ? Justifiez votre réponse.

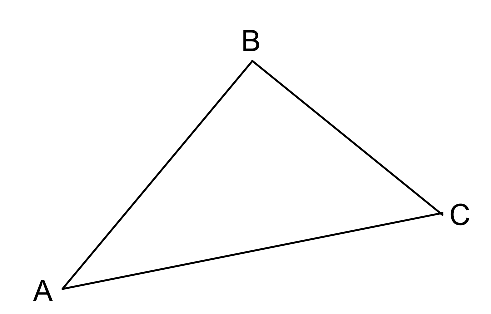
1.2 Somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle

La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle, quel qu'il soit, est égale à 180°.

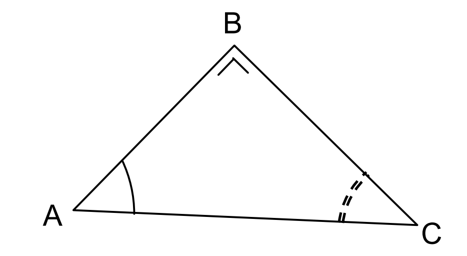
$$\text{ampl.}\widehat{A} + \text{ampl.}\widehat{B} + \text{ampl.}\widehat{C} = 180°$$

ce que nous noterons plus simplement :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$



Cas particulier :
Dans le cas d'un triangle rectangle (*en B, dans l'exemple*), les **2 angles non droits** ($\widehat{A}$ et $\widehat{C}$) de ce triangle **sont des angles aigus**.



TAC 2
Dans le triangle XYZ, rectangle en Z, si X = 63°, quelle est l'amplitude de Y ?

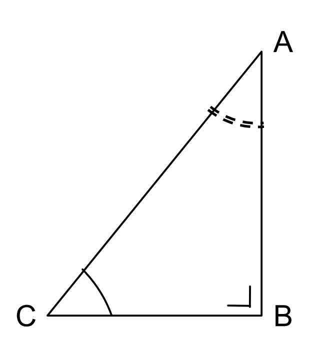
2. NOMBRES TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE INTÉRIEUR D'UN TRIANGLE RECTANGLE

2.1 Préliminaire

Dans les définitions, nous considérerons toujours un triangle rectangle en B.

Les angles aigus sont donc les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$.

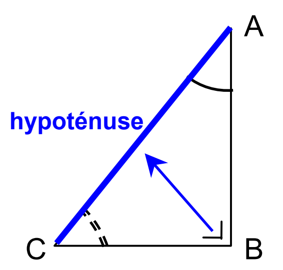
Ce sont ces deux angles qui sont appelés, ici, angles intérieurs.



2.2 Vocabulaire

Soit le triangle ABC rectangle en B.

- [AC] est le côté opposé à l'angle droit $\hat{B}$.
  Ce côté est appelé l'**hypoténuse** du triangle rectangle (en B).

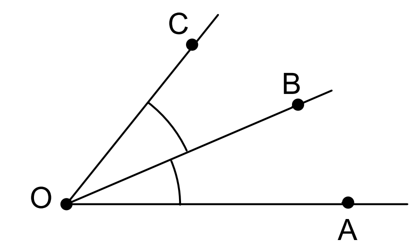


- Considérons l'angle $\hat{A}$.
  Le côté [BC] est appelé le **côté opposé à** $\hat{A}$.
  Le côté [AB] est appelé le **côté** (de l'angle droit) **adjacent* à** $\hat{A}$.

- Considérons l'angle $\hat{C}$.
  Le côté [AB] est appelé le **côté opposé à** $\hat{C}$.
  Le côté [BC] est appelé le **côté** (de l'angle droit) **adjacent à** $\hat{C}$.

* ***Remarque***

- **angles adjacents** : deux angles sont adjacents s'ils ont le même sommet et un côté commun, et s'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.



$\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont deux angles adjacents :

- ils ont le même sommet O,
- ils ont le côté [OB commun,
- ils sont situés de part et d'autre de [OB.

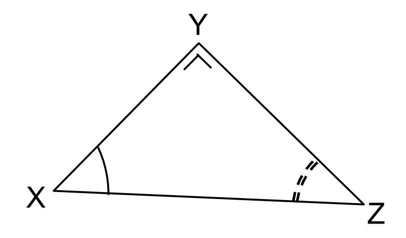
$\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ ne sont pas deux angles adjacents :

- ils ont le même sommet O,
- ils ont un côté commun [OA,
- **MAI**S ils sont situés du même côté de [OA.

- **côté adjacent à un angle** : dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle est le côté de l'angle droit qui est aussi un côté de l'angle considéré (voyez à la page précédente).

TAC 3

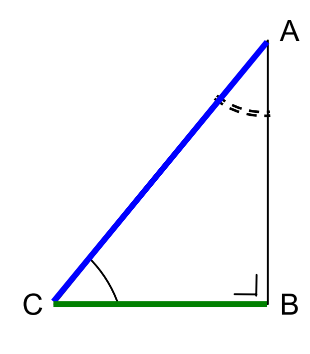
Voici le triangle XYZ, rectangle en Y.



Dans ce triangle :
- quel est le côté opposé à $\hat{X}$?
- quel est le côté (de l'angle droit) adjacent à $\hat{X}$?
- [YZ] est le côté ………. à $\hat{Z}$;
- [XY] est le côté ………. à $\hat{Z}$.

2.3 Le cosinus

➢ Définition

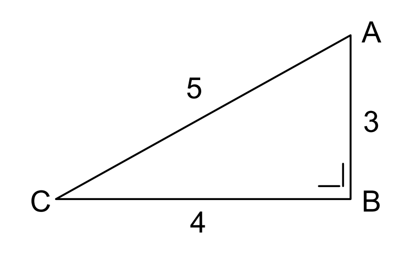


Le **cosinus** de l'angle $\hat{C}$ est noté : **cos** $\hat{C}$, ce qui se lit "cosinus de $\hat{C}$" ou "cos $\hat{C}$".

cos $\hat{C}$ = **rapport entre la longueur du côté** (de l'angle droit) **adjacent à** $\hat{C}$ **et la longueur de l'hypoténuse**

$$= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

➢ Exemple



Soit le triangle ABC, rectangle en B, tel que $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ et $\overline{AC} = 5$.

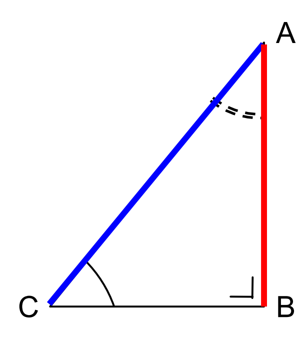
- $\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur hypoténuse}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$
- $\cos \hat{C} = \frac{\text{longueur côté adjacent à } \hat{C}}{\text{longueur hypoténuse}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Vous constatez que le cosinus de ces angles est un nombre inférieur à 1. Ce sera toujours le cas. Nous expliquerons pourquoi par la suite.

> **TAC 4**
>
> Le triangle DEF est un triangle rectangle en E, tel que $\overline{DE} = 3$, $\overline{EF} = 5$ et $\overline{DF} = 5{,}83$.
>
> Calculez cos $\hat{D}$ et cos $\hat{F}$ (écrivez les calculs !).

2.4 Le sinus

- **Définition**

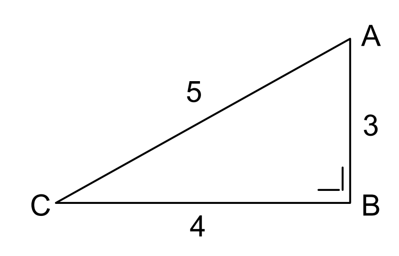


Le **sinus** de l'angle $\hat{C}$ est noté : **sin** $\hat{C}$, ce qui se lit "sinus de $\hat{C}$" ou "sin $\hat{C}$".

sin $\hat{C}$ = **rapport entre la longueur du côté** (de l'angle droit) **opposé à** $\hat{C}$ **et la longueur de l'hypoténuse**

$$= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

- **Exemple**



Soit le triangle ABC, rectangle en B, tel que $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ et $\overline{AC} = 5$.

- $\sin\hat{A} = \dfrac{\text{longueur côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur hypoténuse}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$
- $\sin\hat{C} = \dfrac{\text{longueur côté opposé à } \hat{C}}{\text{longueur hypoténuse}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

Vous constatez que

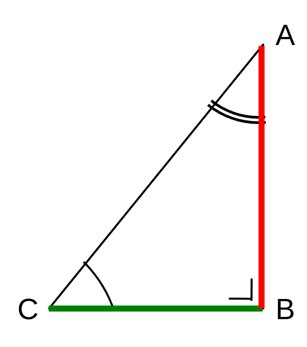
1) le sinus de ces angles est un nombre inférieur à 1. Ce sera toujours le cas. Comme pour le cosinus, nous expliquerons pourquoi par la suite ;
2) sin $\hat{A}$ = cos $\hat{C}$ et sin $\hat{C}$ = cos $\hat{A}$ (ce sera toujours le cas pour un triangle rectangle).

TAC 5

Dans le triangle rectangle donné au TAC 4 à la page 5 (triangle DEF rectangle en E, avec $\overline{DE} = 3$, $\overline{EF} = 5$ et $\overline{DF} = 5{,}83$), calculez sin $\hat{D}$ et sin $\hat{F}$ (écrivez les calculs !).

2.5 La tangente

➢ **Définition**

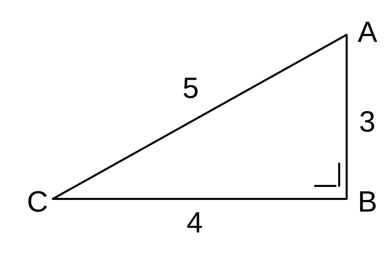


La **tangente** de l'angle $\hat{C}$ est notée : **tan** $\hat{C}$ ou **tg** $\hat{C}$, ce qui se lit "tangente de $\hat{C}$" ou "tangente $\hat{C}$".

tg $\hat{C}$ = **rapport entre la longueur du côté opposé à** $\hat{C}$ **et la longueur du côté** (de l'angle droit) **adjacent à** $\hat{C}$

$$= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

➢ **Exemple**



Soit le triangle ABC, rectangle en B, tel que $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ et $\overline{AC} = 5$.

- $\text{tg}\,\hat{A} = \tan\hat{A} = \dfrac{\text{longueur côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur côté adjacent à } \hat{A}} = \dfrac{4}{3} = 1{,}3333$
- $\text{tg}\,\hat{C} = \tan\hat{C} = \dfrac{\text{longueur côté opposé à } \hat{C}}{\text{longueur côté adjacent à } \hat{C}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Vous constatez que :

1) la tangente de ces angles n'est pas obligatoirement un nombre inférieur à 1, alors que c'était le cas pour le sinus et le cosinus.

   Remarque : lorsqu'un nombre décimal illimité apparaîtra dans ce cours, **nous l'arrondirons toujours à la 4ème décimale**.

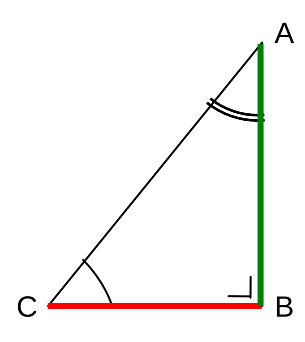
2) tg $\hat{A}$ = inverse de tg $\hat{C}$ (ce sera toujours le cas pour un triangle rectangle).

TAC 6

Dans le triangle rectangle donné au TAC 4 à la page 5 (triangle DEF rectangle en E, avec $\overline{DE} = 3$, $\overline{EF} = 5$ et $\overline{DF} = 5{,}83$), calculez tg $\hat{D}$ et tg $\hat{F}$ (écrivez les calculs !).

2.6 La cotangente

➢ **Définition**



La **cotangente** de l'angle $\hat{C}$ est notée : **cotan** $\hat{C}$ ou **cotg** $\hat{C}$, ce qui se lit "cotangente de $\hat{C}$" ou "cotangente $\hat{C}$".

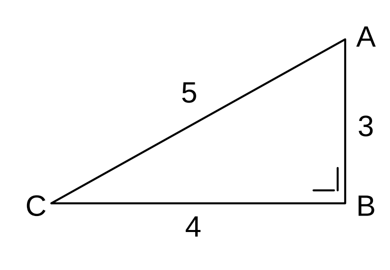
La cotangente d'un angle est l'inverse de la tangente de cet angle.

Donc :

$$\textbf{cotg}\ \hat{C} = \frac{1}{\text{tg}\,\hat{C}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

= **rapport entre la longueur du côté adjacent à $\hat{C}$ et la longueur du côté opposé à $\hat{C}$**

➢ **Exemple**



Soit le triangle ABC, rectangle en B, tel que $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ et $\overline{AC} = 5$.

- $\text{cotg}\,\hat{A} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\hat{A}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

  ou $\text{cotg}\,\hat{A} = \dfrac{\text{longueur côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur côté opposé à } \hat{A}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{3}{4}$

- $\text{cotg}\,\hat{C} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\hat{C}} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3} = 1{,}3333$

  ou $\text{cotg}\,\hat{C} = \dfrac{\text{longueur côté adjacent à } \hat{C}}{\text{longueur côté opposé à } \hat{C}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{4}{3}$

Vous constatez que :

1) comme la tangente, la cotangente de ces angles n'est pas obligatoirement un nombre inférieur à 1 ;
2) $\text{cotg}\,\hat{A}$ = inverse de $\text{cotg}\,\hat{C}$ (ce sera toujours le cas pour un triangle rectangle).

TAC 7

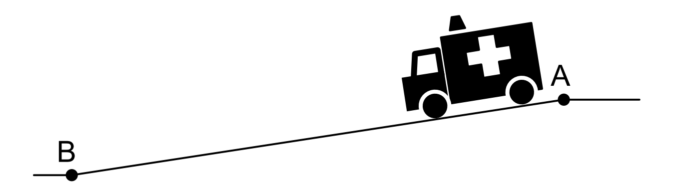
Dans le triangle rectangle donné au TAC 4 à la page 5 (triangle DEF rectangle en E, avec $\overline{DE} = 3$, $\overline{EF} = 5$ et $\overline{DF} = 5{,}83$), calculez $\text{cotg}\,\hat{D}$ et $\text{cotg}\,\hat{F}$ (écrivez les calculs !).

3. ANGLE DE PENTE

La notion de pente est utilisée fréquemment : la pente d'une toiture, la pente d'une route, l'inclinaison de la Tour de Pise, …
C'est une notion intuitive : nous allons voir à quoi elle correspond exactement en mathématiques.

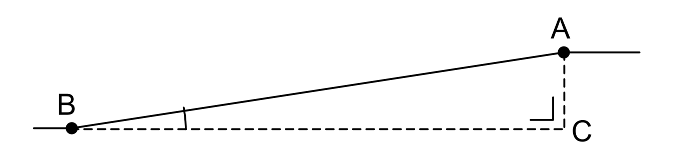
3.1 Exemple

Un enfant fait rouler sa petite ambulance sur un plan incliné, entre un point A et un point B :



3.2 Définition

En mathématiques, l'angle de pente est l'angle de sommet B, si on considère [AB] comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle :



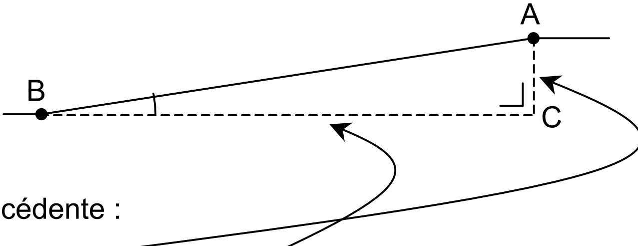
La **pente** est définie comme étant le **rapport entre la variation "d'altitude" et la "distance horizontale"** :

$$\textbf{pente} = \frac{\textbf{variation d'altitude}}{\textbf{distance parcourue horizontalement}}$$

3.3 Calcul de l'angle de pente

Supposons que $\overline{AC} = 15\,(\text{cm})$

et $\overline{BC} = 50\,(\text{cm})$.



D'après la définition de la page précédente :

$$\text{pente} = \frac{\text{variation d'altitude}}{\text{distance parcourue horizontalement}}$$

$$= \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{15}{50} = 0{,}3$$

Ici, la pente est donc égale à $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Or, dans le triangle ABC, rectangle en C : [AC] est le côté opposé à l'angle $\hat{B}$,

[BC] est le côté (de l'angle droit) adjacent à $\hat{B}$.

$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ est la formule permettant de calculer **tg$\hat{\mathbf{B}}$** !

Donc : **pente de AB = tg$\hat{\mathbf{B}}$** = $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

La calculatrice nous aide à **calculer l'angle de pente**, que nous arrondirons au degré :

si $\text{tg}\hat{B} = 0{,}3$, alors $\hat{B} = 16{,}70$ (en degrés décimaux) = 17°.

Vous trouverez sur la feuille suivante quelques notes concernant l'**utilisation de la calculatrice scientifique** (comme pour les notes données dans l'introduction, conservez soigneusement cette feuille, elle pourra vous servir plus tard !).

- pour **calculer les nombres trigonométriques** d'un angle donné,
- pour **calculer un angle** (au degré près) connaissant l'un de ses nombres trigonométriques.

TAC 8

Calculez :

a) l'angle de pente $\hat{B}$ (**arrondi au degré**), si la longueur horizontale correspondant à la distance parcourue par la petite ambulance est de 70 cm et si A est 25 cm plus haut que B,

b) les nombres trigonométriques associés à l'angle de pente.

Feuille à détacher et à conserver

Mode d'emploi de la calculatrice scientifique

Attention ! Dans ce module, nous n'utiliserons que le degré comme unité de mesure des angles, donc commencez par mettre votre calculatrice en mode "degré".

1. Calcul des nombres trigonométriques d'un angle donné

➢ ***Calcul du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle***

Selon votre calculatrice (allez revoir le paragraphe 3° de la page 2 du mode d'emploi),

- soit vous entrez **l'amplitude α de l'angle, puis la fonction**, donc [90] [sin] , ou [α] [cos] , ou [α] [tan] ;
- soit vous entrez d'abord la fonction, puis l'amplitude donnée, donc [sin] [90] ou …
- soit, si votre calculatrice est programmable, vous entrez d'abord la fonction (vous appuyez sur [sin] ou …), puis l'amplitude donnée, qui doit être contenue dans des parenthèses.

➢ ***Calcul de la cotangente d'un angle***

1° Vous calculez la tangente de l'angle ;

2° vous appuyez ensuite sur la touche [1/x] (ou [$\frac{1}{x}$]), puisque la cotangente est l'inverse de la tangente.

2. Calculer un angle (arrondi au degré) connaissant l'un de ses nombres trigonométriques

➢ ***Calcul d'un angle connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente***

En général : 1° vous introduisez le nombre trigonométrique (α),

2° vous appuyez sur la touche qui varie selon les machines : [INV] ou [↑] ou [2nd] ou une touche de couleur (généralement, avec un F).

Calculatrice programmable :

1° vous appuyez sur la touche [INV] ou [↑] ou [2nd],

2° vous appuyez ensuite sur [sin] (ou [cos] ou [tan]),

3° vous introduisez le nombre trigonométrique (α).

Remarque : dans ce module, nous ne vous demanderons que des amplitudes d'angles "au degré près", donc vous arrondissez le nombre obtenu (nombre de degrés) à l'unité.

- ***Calcul d'un angle connaissant sa cotangente*** :

En général : 1° vous introduisez la valeur de la cotangente (α),

2° vous appuyez sur la touche [1/x] (ou [$\frac{1}{x}$]) → cela vous donne la tangente de l'angle,

3° vous appuyez sur la touche qui varie selon les machines : [INV] ou [↑] ou [2nd] ou une touche de couleur (généralement, avec un F).

Calculatrice programmable :

1° vous appuyez sur la touche [INV] ou [↑] ou [2nd],

2° puis vous appuyez sur la touche [tan],

3° enfin, vous appuyez sur la touche [1/x],

4° vous introduisez le nombre trigonométrique.

Même *remarque* que ci-dessus.